

2010 年 1 月联考数学真题

1. 电影开演时观众中女士与男士人数之比为 5:4, 开演后无观众入场, 放映一小时后, 女士的 20%, 男士的 15% 离场, 则此时在场的女士和男士人数之比为 ()
 (A) 4:5 (B) 1:1 (C) 5:4 (D) 20:17 (E) 85:64

【参考答案】D

【知识点】数量变化的比例问题

【名师讲解】设女士为 $5a$, 男士则为 $4a$, 部分离场后女士与男士比例为 $\frac{5a \times (1-20\%)}{4a \times (1-15\%)} = \frac{20}{17}$

2. 某商品的成本为 240 元, 若按该商品标价的八折出售, 利润率是 15%, 则该商品的标价为 ()
 (A) 276 元 (B) 331 元 (C) 345 元 (D) 360 元 (E) 400 元

【参考答案】C

【知识点】商品打折问题

【名师讲解】设标价为 x 元, $0.8x=240(1+15\%)$, 解得 $x=345$ (元), 选 C

3. 三名小孩中有一名学龄前儿童 (年龄不足 6 岁), 他们的年龄都是质数 (素数), 且依次相差 6 岁, 他们的年龄之和为 ()
 (A) 21 (B) 27 (C) 33 (D) 39 (E) 51

【参考答案】C

【知识点】质数性质等差数列求和

【名师讲解】小于 6 的质数为 2, 3, 5, 判别可得三小孩的年龄为 5, 11, 17, $5+11+17=33$, 选 C

4. 在右边的表格中, 每行为等差数列, 每列为等比数列, $x+y+z=$ ()
 (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 3
 (D) $\frac{7}{2}$ (E) 4

2	$\frac{5}{2}$	3
x	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
a	y	$\frac{3}{4}$
b	c	z

【参考答案】A

【知识点】已知等差、等比数列求参数

【名师讲解】寻找公差和公比可得到 $x=1, y=\frac{5}{8}, z=\frac{3}{8}$,

所以 $x+y+z=2$, 选 A

5. 如图 1, 在直角三角形 ABC 区域内部有座山, 现计划从 BC 边上的某点 D 开凿一条隧道到点 A, 要求隧道

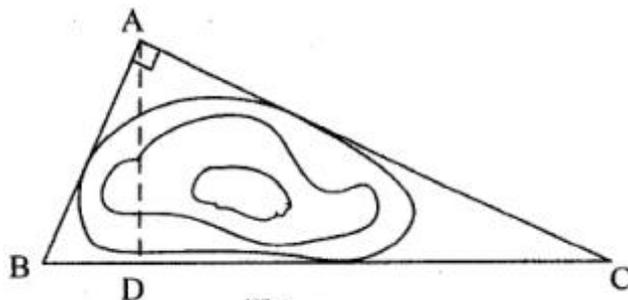


图 1

长度最短，已知 AB 长为 5km，AC 长为 12km，则所开凿的隧道 AD 的长度约为 ()

- (A) 4.12km (B) 4.22km (C) 4.42km
(D) 4.62km (E) 4.92km

【参考答案】D

【知识点】距离计算

【名师讲解】利用三角形面积公式 $\frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times AD \times BC$ ，所以 $AD = \frac{5 \times 12}{13} \approx 4.62$ ，选 D

6. 某商场举行店庆活动，顾客消费达到一定数量后，可以在 4 种赠品中随机选取 2 件不同的赠品，任意两位顾客所选的赠品中，恰有 1 件品种相同的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

【参考答案】E

【知识点】排列组合

【名师讲解】的选择方法：分步第一位顾客四种赠品中选两种 C_4^2 ，第二位顾客也在四种赠品中选两

种 C_4^2 ，即总的选择方法为 $C_4^2 C_4^2$ ，恰有一品种相同则 $C_4^1 C_3^1 C_2^1$ ，所以概率为 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^1}{C_4^2 C_4^2} = \frac{2}{3}$ ，选 E

7. 多项式 $x^3 + ax^2 + bx - 6$ 的两个因式是 $x - 1$ 和 $x - 2$ ，则其第三个一次因式为 ()

- (A) $x - 6$ (B) $x - 3$ (C) $x + 1$ (D) $x + 2$ (E) $x + 3$

【参考答案】B

【知识点】多项式乘法

【名师讲解】可设 $x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x - 1)(x - 2)(x + c)$ ，根据常数项(令 $x = 0$)得到 $(-1)(-2)c = -6$ ，解得 $c = -3$ ，所以因式为 $x - 3$ ，选 B

8. 某公司的员工中，拥有本科毕业证、计算机等级证、汽车驾驶证的人数分别为 130, 110, 90. 又知只有一种证的人数为 140，三证齐全的人数为 30，则恰有双证的人数为

- (A) 45 (B) 50 (C) 52 (D) 65 (E) 100

【参考答案】B

【知识点】三饼问题

【名师讲解】设恰有双证的人数为 y 人， $130 + 110 + 90 = 140 + 2 \times y + 3 \times 30$ ，所以 $y = 50$ ，选 B

9. 甲商店销售某种商品，该商品的进价为每件 90 元。若每件定价为 100 元，则一天内能售出 500 件。在此基础上，定价每增加 1 元，一天便少售出 10 件，甲商店欲获得最大利润，则该商品的定价应为 ()

(A) 115 元 (B) 120 元 (C) 125 元 (D) 130 元 (E) 135 元

【参考答案】B

【知识点】二次函数求最值

【名师讲解】设比原定价 100 元高 x 元, 则利润 $y = (100 + x - 90)(500 - 10x) = -[(x - 20)^2 + 100]$;

从而 $x = 20$ 时利润最大定价为 120 元, 选 B

10. 已知直线 $ax - by + 3 = 0 (a > 0, b > 0)$ 过圆 $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 的圆心, 则

$a \cdot b$ 的最大值为 ()

(A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{11}{16}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{9}{8}$ (E) $\frac{9}{4}$

【参考答案】D

【知识点】直线与圆的位置关系、平均值定理

【名师讲解】 $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 圆心为 $(-2, 1)$, $ax - by + 3 = 0$ 过

圆心, 则 $-2a - b + 3 = 0$, 即 $2a + b = 3$; 根据平均值定理有 $3 = 2a + b \geq 2\sqrt{2ab}$, 从而 $ab \leq \frac{9}{8}$, 选 D

11. 某大学派出 5 名志愿者到西部 4 所中学支教, 若每所中学至少有一名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()

(A) 240 种 (B) 144 种 (C) 120 种 (D) 60 种 (E) 24 种

【参考答案】A

【知识点】分配问题

【名师讲解】捆绑法, 先选择两名志愿者捆绑打包, 然后进行全排列: $C_5^2 P_4^4 = 240$, 选 A

12. 某装置的启动密码是由 0 到 9 的 3 不同数字组成, 连续三次输入错误密码, 就会导致该装置永久关闭, 一个仅记得密码是由 3 不同数字组成的人能够启动此装置的概率为 ()

(A) $\frac{1}{120}$ (B) $\frac{1}{168}$ (C) $\frac{1}{240}$ (D) $\frac{1}{720}$ (E) $\frac{3}{1000}$

【参考答案】C

【知识点】尝试密码

【名师讲解】由于密码智能试 3 次且数值不能重复, 所以属于排列问题, 同样密码无论有多少: 组

合实验只能为 3 次, $\frac{3}{P_{10}^3} = \frac{1}{240}$, 选 C

13. 某居民小区决定投资 15 万元修建停车位, 据测算, 修建一个室内车位的费用为 5000 元, 修建一个室外车位的费用为 1000 元, 考虑到实际因素, 计划室外车位的

数量不少于室内车位的 2 倍, 也不多余室内车位的 3 倍, 这笔投资最多可建车位的数量为 ()

- (A) 78 (B) 74 (C) 72 (D) 70 (E) 66

【参考答案】B

【知识点】不等式相关的最优问题

【名师讲解】设室内修 x 个车位, 室外修 y 个车位, 则

$$5000x + 1000y \leq 150000 \text{ 且 } 2x \leq y \leq 3x, \text{ 求 } \max\{x + y\}$$

解并取整的 $x = 19, y = 55$, 故最多可建 $19 + 55 = 74$ 个车位, 选 B

14. 如图 2, 长方形 ABCD 的两条边长分别为 8 m 和 6 m, 四边形 OEFG 的面积是 $4m^2$, 则阴影部分的面积为 ()

- (A) $32m^2$ (B) $28m^2$ (C) $24m^2$ (D) $16m^2$ (E) $8m^2$

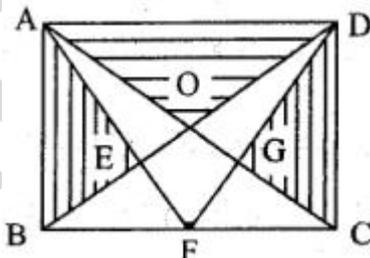


图 2

【参考答案】B

【知识点】三角形与四边形面积

【名师讲解】阴影 $S = S_{ABCD} - S_{AFC} - S_{BDF} + S_{EFGO}$, 而

$$S_{AFC} + S_{BDF} = \frac{1}{2}CF \cdot AB + \frac{1}{2}BF \cdot AB = \frac{1}{2}BC \cdot AB = 24, S_{EFGO} = 4, \text{ 阴影 } S = 48 - 24 + 4 = 28, \text{ 所以选 B}$$

以选 B

15. 在一次竞猜活动中, 设有 5 关, 如果连续通过 2 关就算闯关成功, 小王通过每关的概率都是 $\frac{1}{2}$, 他闯关成功的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{4}{8}$ (E) $\frac{19}{32}$

【参考答案】E

【知识点】闯关问题

【名师讲解】①前两次就连续通过 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

②第一次没通过, 第二、三次连续通过 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

③四次才能闯关成功则第三次第四次都通过, 那么第二次肯定失败, 第一次可以成功也可以失败, 所以 $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

④第五次才能闯关成功, 那么第四次和第五次都通过, 第三次肯定失败, 前三次有三种情况 $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{32}$

从而概率为上述概率之和，等于 $\frac{19}{32}$ ，选 E

16. $a | a - b | \geq |a|(a - b)$

(1) 实数 $a > 0$

(2) 实数 a, b 满足 $a > b$

【参考答案】A

【知识点】绝对值大小比较

【名师讲解】 $|a - b| \geq a - b$ 恒成立，条件 (1) 因为 $a > 0$ ，则 $a |a - b| \geq |a|(a - b)$ ，所以充分；
条件 (2) 当 $a < 0$ 时，左式 ≤ 0 ，右式 ≥ 0 ，结论不成立，所以不充分，所以选 A.

17. 有偶数位来宾。

(1) 聚会时所有来宾都被安排坐在一张圆桌周围，且每位来宾与其邻座性别不同

(2) 聚会时男宾人数是女宾人数的两倍

【参考答案】A

【知识点】奇数偶数性质判断

【名师讲解】条件 (1) 男宾人数=女宾人数，故总人数为偶数，成立；条件 (2) 当男宾人数为偶数时，女宾为奇数，总人数仍然为奇数，不成立，选 A.

18. 售出一件甲商品比售出一件乙商品利润要高

(1) 售出 5 件甲商品，4 件乙商品共获利 50 元

(2) 售出 4 件甲商品，5 件乙商品共获利 47 元

【参考答案】C

【知识点】商品利润比较

【名师讲解】设一件甲商品的利润为 x ，一件乙商品的利润为 y ；

$$\text{则} \begin{cases} 5x + 4y = 50 \\ 4x + 5y = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(x + y) + x = 50 \\ 4(x + y) + y = 47 \end{cases} \quad \text{显然 } x > y, \text{ 选 C}$$

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 d ， $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12$ ，则 $a_4 = 0$

(1) $d = -2$

(2) $a_2 + a_4 = 4$

【参考答案】D

【知识点】求数列的元素

【名师讲解】 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12 \Rightarrow a_2 + a_3 = 6$ ，(1) $2a_2 + d = 6$ ，即 $a_2 = 4$ 从而 $a_4 = 0$ ，充分；

(2) $a_2 + a_4 = 4$ 结合 $a_2 + a_3 = 6$, 有 $d = -2$, 故也充分, 选 D

20. 甲企业今年人均成本是去年的 60%.

- (1) 甲企业今年总成本比去年减少 25%, 员工人数增加 25%.
- (2) 甲企业今年总成本比去年减少 28%, 员工人数增加 20%.

【参考答案】D

【知识点】求人均数值关系

【名师讲解】设去年总成本 a , 总人数为 b , 条件 (1) $\frac{a(1-25\%)}{b(1+25\%)} = \frac{a}{b} \times 60\%$, 充分;

条件 (2) $\frac{a(1-28\%)}{b(1+20\%)} = \frac{a}{b} \times 60\%$, 充分, 选 D

21. 该股票涨了.

- (1) 某股票连续三天涨 10% 后, 又连续三天跌 10%.
- (2) 某股票连续三天跌 10% 后, 又连续三天涨 10%.

【参考答案】E

【知识点】涨跌问题

【名师讲解】设该股票原价为 x :

(1) 三涨三跌后的股价为 $x(1-10\%)^3(1+10\%)^3 = 0.99^3 x < x$, 不充分

(2) 三跌三涨后的股价为 $x(1+10\%)^3(1-10\%)^3 = 0.99^3 x < x$, 不充分

(1) 和 (2) 无法联合, 故仍不充分, 选 E

22. 某班有 50 名学生, 其中女生 26 名, 已知在某次选拔测试中, 有 27 名同学未通过, 则有 9 名男生通过.

- (1) 在通过的学生中, 女生比男生多 5 人.
- (2) 在男生中, 未通过的人数比通过的人数多 6 人.

【参考答案】D

【知识点】已知总量, 求部分量

【名师讲解】依题意得, 男生人数 24 人; 女生 26 人, 通过人数为 23 人, 未通过为 27 人, 条件 (1) 设男生通过 x 人, 则 $x+5+x=23$, 解得 $x=9$, 充分; 条件 (2) 设男生中通过的为 x 人, 则 $(24-x)-x=6$, 解得 $x=9$, 也充分, 选 D.

23. 甲企业一年的总产值为 $\frac{a}{p}[(1+p)^{12}-1]$

- (1) 甲企业一月份的产值为 a , 以后每月产值的增长率为 p .

(2) 甲企业一月份的产值为 $\frac{a}{2}$ ，以后每月产值的增长率为 $2p$ 。

【参考答案】A

【知识点】等比数列求和

【名师讲解】企业逐月产值组成一个等比数列 $\{a_n\}$ (1) $a_1 = a$, $q = 1 + p$

$$s_{12} = \frac{a[1-(1+p)^{12}]}{1-(1+p)} = \frac{a}{p}[(1+p)^{12}-1], \text{ 充分; (2) } a_1 = \frac{a}{2}, q = 1+2p, s_{12} = \frac{\frac{a}{2}[1-(1+2p)^{12}]}{1-(1+2p)},$$

不充分, 选 A

24. 设 a, b 为非负实数, 则 $a+b \leq \frac{5}{4}$

(1) $ab \leq \frac{1}{16}$

(2) $a^2 + b^2 \leq 1$

【参考答案】C

【知识点】配方求最值

【名师讲解】条件 (1) 举出反例 $a=2, b=\frac{1}{32}$ 时显然不充分;

条件 (2) $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时也不充分; 考虑联合, 联合时 $a^2 + b^2 + 2ab \leq 1 + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{8} \Rightarrow a+b \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} < \frac{5}{4}$

充分, 选 C

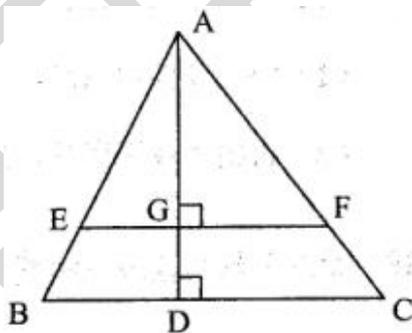


图 3

25. 如图 3, 在三角形 ABC 中, 已知 $EF \parallel BC$, 则三角形 AEF 的面积等于梯形 EBCF 的面积.

(1) $|AG| = 2|GD|$

(2) $|BC| = \sqrt{2}|EF|$

【参考答案】B

【知识点】利用相似通过面积求长度

【名师讲解】显然只要满足 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 时即可, 条件 (1) $AG = \frac{2}{3}AD, EF = \frac{2}{3}BC$, 从而

$$S_{\triangle AEF} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC}, \text{ 不充分; 条件 (2) } EF = \frac{\sqrt{2}}{2} BC, AG = \frac{\sqrt{2}}{2} AD, \text{ 从而}$$

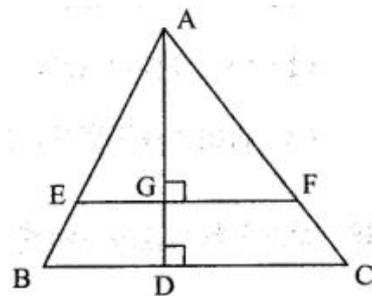


图 3

$$S_{\triangle AEF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \text{ 充分, 选 B}$$

高中数学网