

## 2015 年 1 月联考数学真题

1. 若实数  $a, b, c$ , 满足  $a:b:c=1:2:5$ , 且  $a+b+c=24$ , 则  $a^2+b^2+c^2=(\quad)$

- (A) 30      (B) 90      (C) 120      (D) 240      (E) 270

【参考答案】E

【知识点】比例问题

【名师讲解】设  $a=k, b=2k, c=5k$ ,  $k+2k+5k=8k=24$ , 解得  $k=3$ , 故  $a^2+b^2+c^2=270$

2. 某公司共有甲、乙两个部门, 如果从甲部门调 10 人到乙部门, 那么乙部门人数是甲部门的 2 倍; 如果把乙部门员工的  $\frac{1}{5}$  调到甲部门, 那么两个部门的人数相等。求公司的总人数为  $(\quad)$

- (A) 150      (B) 180      (C) 200      (D) 240      (E) 250

【参考答案】D

【知识点】比例问题

【名师讲解】设甲部门人数为  $x$ , 乙部门人数为  $y$ , 则可得方程组:

$$\begin{cases} 2(x-10)=y+10 \\ \frac{4}{5}y=x+\frac{1}{5}y \end{cases}, \text{解得: } x=90, y=150. \text{故总人数为 240 人, 故选 D}$$

3. 设  $m, n$  是小于 20 的质数, 满足条件  $|m-n|=2$  的  $\{m, n\}$  共有  $(\quad)$

- (A) 2 组      (B) 3 组      (C) 4 组      (D) 5 组      (E) 6 组

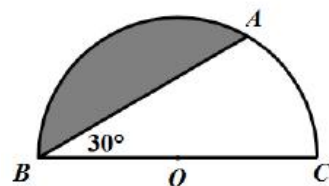
【参考答案】C

【知识点】质数性质

【名师讲解】小于 20 的质数分别是 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19; 其中  $|m-n|=2$  的组合有 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 共计四组, 故选 C

4. 如图,  $BC$  是半圆直径, 且  $BC=4$ ,  $\angle ABC=30^\circ$ , 则图中阴影部分面积为  $(\quad)$

- A  $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$       B  $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$       C  $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$   
D  $\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$       E  $2\pi - 2\sqrt{3}$

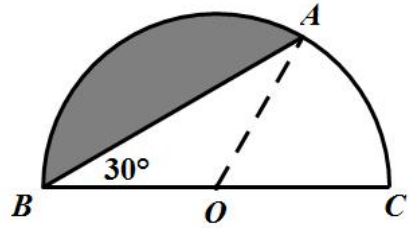


【参考答案】A

【知识点】

【名师讲解】

连接  $OA$ , 因为  $\angle ABC = 30^\circ$ , 则  $\angle BOA = 120^\circ$ , 等腰三角形  $ABO$  面积计算可得  $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$ ; 扇形  $ABO$  面积计算可得  $\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 = \frac{4}{3}\pi$ ; 故所求阴影面积为  $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ , 选 A



5. 某人驾车从A地赶往B地, 前一半路程比计划多用时45分钟, 平均速度只有计划的80%, 若后一半路程的平均速度120千米/小时, 此人还能按原定时间到达B地, 则A、B两地的距离为( )

- (A) 450千米 (B) 480千米 (C) 520千米 (D) 540千米 (E) 600千米

【参考答案】D

【知识点】行程问题

【名师讲解】设从A地到B地计划用时  $t$ , 两地距离为  $S$ ,

$$\text{由前半程得: } \left(\frac{t}{2} + 0.75\right) \cdot 0.8 \cdot \frac{S}{t} = \frac{S}{2}, \text{ 解得 } t = 6;$$

$$\text{由后半程得: } \frac{S}{2} = \left(\frac{t}{2} - 0.75\right) \cdot 120, \text{ 解得 } S = 540, \text{ 故选D}$$

6. 在某次考试中, 甲、乙、丙三个班的平均成绩分别为80、81和81.5, 三个班的学生分数之和为6952, 三个班共有学生( )

- (A) 85名 (B) 86名 (C) 87名 (D) 88名 (E) 90名

【参考答案】B

【知识点】至多至少问题

【名师讲解】全班人数记为  $M$ , 则有  $\frac{6952}{81.5} < M < \frac{6952}{80}$ ,  $85.3 < M < 86.9$ , 故选 B

7. 有一根圆柱形铁管, 管壁厚度为0.1米, 内径为1.8米, 长度为2米, 若将该铁管融化后浇铸成长方体, 则该长方体的体积为( ) ( $\pi \approx 3.14$ )

- (A) 0.38 (B) 0.59 (C) 1.19 (D) 5.09 (E) 6.28

【参考答案】C

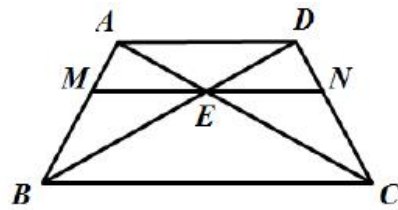
【知识点】圆柱体

【名师讲解】设外部体积为  $V_1$ , 内部体积为  $V_2$ ; 所以体积为:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \left(\frac{1.8}{2} + 0.1\right)^2 h - \pi \left(\frac{1.8}{2}\right)^2 h = \pi(1^2 - 0.9^2) \cdot 2 = 1.19, \text{ 选C}$$

8. 如图, 梯形ABCD 的上底与下底分别为5, 7, E 为AC 与BD 的交点, MN 过点E 且平行与AD, 则MN= ( )

- A  $\frac{26}{5}$       B  $\frac{11}{2}$       C  $\frac{35}{6}$       D  $\frac{36}{7}$       E  $\frac{40}{7}$



【参考答案】C

【知识点】平面几何相似

【名师讲解】 $\triangle AED$  与  $\triangle CEB$  相似, 故点 E 到 AD 的距离与点 E 到 BC 的距离之比为 5:7;

$\triangle AME$  与  $\triangle ABC$  相似, 且点 A 到 ME 的距离与点 A 到 BC 的距离之比为 5:12,

故  $ME = \frac{12}{5} \times 7 = \frac{35}{2}$ ; 同理  $EN = \frac{35}{6}$ , 故  $MN = \frac{35}{6}$ , 故选 C

9. 若直线  $y = ax$  与圆  $(x-a)^2 + y^2 = 1$  相切, 则  $a^2 = ( )$

- A  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$       B  $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$       C  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       D  $1+\frac{\sqrt{5}}{3}$       E  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【参考答案】E

【知识点】直线和圆相切

【名师讲解】圆心为  $(a, 0)$ , 半径为 1, 圆心到直线距离为  $d = \frac{|a^2|}{\sqrt{1+a^2}} = 1$ ,

整理得:  $(a^2)^2 - a^2 - 1 = 0$ , 解得:  $a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 故选 E

10. 设点 A  $(0, 2)$  和 B  $(1, 0)$ , 在线段 AB 上取一点  $M(x, y)$  ( $0 < x < 1$ ), 则以 x, y 为两边长的矩形面积的最大值为 ( )

- A  $\frac{5}{8}$       B  $\frac{1}{2}$       C  $\frac{3}{8}$       D  $\frac{1}{4}$       E  $\frac{1}{8}$

【参考答案】B

【知识点】均值定理

【名师讲解】过 A、B 两点的直线方程为:  $2x + y - 2 = 0$ , 故  $M(x, y)$  满足  $2x + y = 2$ ; 矩形面积

为  $xy$ ,  $2x + y \geq 2\sqrt{2xy}$ , 所以  $2\sqrt{2xy} \leq 2$ , 则  $xy \leq \frac{1}{2}$ , ( $2x = y$  时等号成立), 故选 B

11. 已知是  $x_1, x_2$  方程  $x^2 - ax - 1 = 0$  的两个实数根, 则  $x_1^2 + x_2^2 = ( )$

- (A)  $a^2 + 2$       (B)  $a^2 + 1$       (C)  $a^2 - 1$       (D)  $a^2 - 2$       (E)  $a + 2$

【参考答案】A

【知识点】韦达定理

【名师讲解】方程韦达定理应用：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2$$

12. 某兴新产业在2005年末至2009年末产值的年平均增长率为 $q$ ，在2009年末至2013年末产值的平均增长率比前四年下降40%，2013年的产值约为2005年产值的14.46

( $\approx 1.95^4$ )倍，则 $q$ 的值约为( )

- (A) 30%      (B) 35%      (C) 40%      (D) 45%      (E) 50%

【参考答案】E

【知识点】百分数应用题

【名师讲解】设2005年产值为 $a$ ，2009年产值为 $a(1+q)^4$ ，2013年产值为 $a(1+q)^4[1+(1-0.4)q]^4$ ，

故根据题意有 
$$\frac{a(1+q)^4[1+(1-0.4)q]^4}{a} = (1+q)^4[1+(1-0.4)q]^4 = 1.95^4 \text{ 即 } 0.6q^2 + 1.6q - 0.95 = 0,$$

解得 $q = 0.5$ ，故选E

13. 一件工作，甲，乙两人合作需要2天，人工费为2900元；乙，丙两人合作需要4天，人工费2600元；甲，丙两人合作2天完成了全部工程量的 $\frac{5}{6}$ ，人工费为2400元，

甲单独做该工作需要时间与人工费别为( )

- (A) 3天，3000元      (B) 3天，2850元      (C) 3天，2700元  
(D) 4天，3000元      (E) 4天，2900元

【参考答案】A

【知识点】工程问题

【名师讲解】设甲独立完成工作需要 $x$ 天，乙需要 $y$ 天，丙需要 $z$ 天。

则有 
$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1, \quad \frac{4}{y} + \frac{4}{z} = 1, \quad \frac{2}{x} + \frac{2}{z} = \frac{5}{6}.$$
 解得  $x = 3, y = 6, z = 12$ 。

设甲人工费每天 $l$ 元，乙每天 $m$ 元，丙 $n$ 元。

则有  $2(l+m) = 2900, \quad 4(m+n) = 2600, \quad 2(l+n) = 2400$ 。

解得  $l = 1000, m = 450, n = 200$ 。故甲需要3天，3000元，故选A

14. 某次网球比赛的四强对阵为甲对乙，丙对丁，两场比赛的胜者将争夺冠军，选手之

间相互获胜的概率如下：

	甲	乙	丙	丁
甲获胜的概率		0.3	0.3	0.8
乙获胜的概率	0.7		0.6	0.3
丙获胜的概率	0.7	0.4		0.5
丁获胜的概率	0.2	0.7	0.5	

甲获得冠军的概率为 ( )

- A 0.165      B 0.245      C 0.275      D 0.315      E 0.330

【参考答案】A

【知识点】独立事件

【名师讲解】独立事件分为两类：甲胜乙，丙胜丁，甲胜丙  $0.3 \times 0.5 \times 0.3 = 0.045$ ；第二类：甲胜乙，丁胜丙，甲胜丁  $0.3 \times 0.5 \times 0.8 = 0.12$ ，故  $0.045 + 0.12 = 0.165$ ，选 A

15. 平面上有5条平行直线与另一组  $n$  条平行直线垂直，若两组平行直线共构成280个矩形，则  $n =$  ( )

- (A) 5      (B) 6      (C) 7      (D) 8      (E) 9

【参考答案】D

【知识点】排列组合

【名师讲解】分步完成，先取水平直线两条，再取垂直直线两条  $C_5^2 \times C_n^2 = 280$ ，解得  $n = 8$

16. 已知  $p, q$  为非零实数，则能确定  $\frac{p}{q(p-1)}$  的值

- (1)  $p+q=1$       (2)  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

【参考答案】B

【知识点】分式运算

【名师讲解】条件 (1)  $p+q=1$ ， $\frac{p}{q(p-1)} = \frac{p}{-q^2} = \frac{1-q}{-q^2}$ ，不能确定，不充分；条件 (2)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{p}{q(p-1)} = \frac{q}{q} = 1 \text{ 充分，选 B}$$

17. 信封中装有10张奖券，只有1张有奖，从信封中同时抽取2张奖券，中奖的概率记为  $P$ ；从信封中每次抽取1张奖券后放回，如此重复抽取  $n$  次，中奖的概率记为  $Q$ ，则  $P < Q$ 。

- (1)  $n=2$       (2)  $n=3$

【参考答案】B

【知识点】抽奖问题

【名师讲解】(1)  $p = \frac{C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$ ,  $Q = 1 - \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 0.19 < 0.2 = P$ , 不充分; (2)  $p = \frac{C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$ ,

$Q = 1 - \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{271}{1000} > \frac{1}{5} = P$ , 充分, 故选 B

18. 圆盘  $x^2 + y^2 \leq 2(x+y)$  被直线 L 分为面积相等的两部分

(1)  $L: x+y=2$

(2)  $L: 2x-y=1$

【参考答案】D

【知识点】直线与圆的位置关系

【名师讲解】圆盘为  $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ , 要被直线 L 分为面积相等的两个部分, 只需要 L 过圆心  $(1, 1)$ , 可知条件 (1) (2) 都充分, 故选 D

19. 已知  $a, b$  为实数, 则  $a \geq 2$  或  $b \geq 2$

(1)  $a+b \geq 4$     (2)  $ab \geq 4$

【参考答案】A

【知识点】不等式运算

【名师讲解】条件 (1),  $a+b \geq 4$  显然可以推出  $a \geq 2$  或  $b \geq 2$ , 即要么  $a \geq 2$  要么  $b \geq 2$ , 充分; 条件 (2), 举反例, 当  $a \leq -2$  或  $b \leq -2$  时也成立, 不充分, 故选 A

20. 已知  $M = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})(a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ ,

$N = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})$ , 则  $M > N$ 。

(1)  $a_1 > 0$       (2)  $a_1 a_n > 0$

【参考答案】B

【知识点】不等式运算

【名师讲解】设  $a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = X$ , 则  $M - N = (a_1 + X)(X + a_n) - (a_1 + X + a_n)X = a_1 a_n$ , 故条件 (2) 单独充分, 故选 B

21. 已知  $\{a_n\}$  是公差大于零的等差数列,  $S_n$  是  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则  $S_n \geq S_{10}$ ,  $n=1,2,\dots$

(1)  $a_{10} = 0$

(2)  $a_{11}a_{10} < 0$

【参考答案】D

【知识点】等差数列前  $n$  项和最值问题

【名师讲解】(1)  $a_{10} = 0$ , 即  $S_9 = S_9 + a_{10} = S_{10}$ , 所以根据图像对称性,  $n=9$  时,  $S_n = S_{10}$ ; 当  $n \neq 9$

时,  $S_n > S_{10}$ , 故  $S_n \geq S_{10}$ ,  $n=1,2,\dots$  充分; (2)  $a_{11}a_{10} < 0$ ,  $d > 0$   $\begin{cases} a_{10} < 0 \\ a_{11} > 0 \end{cases}$ , 所以  $S_n \geq S_{10}$ , 条件

(2) 也充分, 故选 D.

22. 设  $\{a_n\}$  的等差数列, 则能确定数列  $\{a_n\}$

(1)  $a_1 + a_6 = 0$

(2)  $a_1 a_6 = -1$

【参考答案】E

【知识点】等差数列推导

【名师讲解】显然单独看都不充分, 联合考虑, 则有  $\begin{cases} a_1 + a_6 = 0 \\ a_1 \cdot a_6 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_6 = 1 \end{cases}$  或者  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_6 = -1 \end{cases}$

$a_n = \frac{2}{5}n - \frac{7}{5}$  或  $a_n = -\frac{2}{5}n + \frac{7}{5}$ , 数列仍不能唯一确定, 故选 E

23. 底面半径为  $r$ , 高为  $h$  的圆柱体表面积记为  $S_1$ , 半径为  $R$  的球体表面积记为  $S_2$ , 则

$S_1 \leq S_2$ .

(1)  $R \geq \frac{r+h}{2}$

(2)  $R \leq \frac{r+2h}{3}$

【参考答案】C

【知识点】圆柱体及求得表面积

【名师讲解】 $S_1 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ,  $S_2 = 4\pi R^2$ , 题干预证  $S_1 \leq S_2$  即  $2r^2 + 2rh \leq 4R^2$ , 条件 (1)

$R \geq \frac{r+h}{2} \Rightarrow 2R \geq r+h \Rightarrow 4R^2 \geq (r^2+h^2) + 2rh$ , 无法确定  $4R^2 \geq 2r^2 + 2rh$ , 条件 (1) 不充分; 条

件 (2) 单独看,  $R$  无限趋近于零时, 显然不成立, (1) (2) 联合起来,  $\frac{2h+r}{3} \geq \frac{r+h}{2} \Rightarrow h \geq r$ , 则

$$4R^2 \geq (r^2 + h^2) + 2rh \geq 2r^2 + 2rh \Rightarrow S_2 \geq S_1, \text{充分, 选 C}$$

24. 已知  $x_1, x_2, x_3$  为实数,  $\bar{x}$  为  $x_1, x_2, x_3$  的平均值, 则  $|x_k - \bar{x}| \leq 1, k=1, 2, 3$

(1)  $|x_k| \leq 1, k=1, 2, 3$

(2)  $x_1 = 0$

【参考答案】C

【知识点】绝对值不等式

【名师讲解】条件 (1) 取  $-1, -1, 1$ , 则有  $|x_k - \bar{x}| = \frac{4}{3}$  因而不充分; 两条件联合

$$|x_k - \bar{x}| = \left| x_k - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right|; \quad k=1, |x_k - \bar{x}| = \left| \frac{x_2 + x_3}{3} \right| \leq \frac{|x_2|}{3} + \frac{|x_3|}{3} \leq \frac{2}{3}; \quad k=2 \text{ 或 } 3 \text{ 时,}$$

$$|x_k - \bar{x}| = \left| \frac{2x_2 - x_3}{3} \right| \leq \frac{|2x_2|}{3} + \frac{|x_3|}{3} \leq 1, \text{ 联合充分, 故选 C}$$

25. 几个朋友外出游玩, 购买了一些瓶装水, 则能确定购买的瓶装水数量

(1) 若每人分 3 瓶, 则剩余 30 瓶

(2) 若每人分 10 瓶, 则只有一人不够

【参考答案】C

【知识点】不等式分配

【名师讲解】显然条件 (1) (2) 都不无法得出瓶装水数量, 联合 (1) (2)

$$\text{则有 } \begin{cases} y = 3x + 30 \\ 10(x-1) < y \leq 10x \end{cases} \Rightarrow \frac{30}{7} < x \leq \frac{40}{7}; \text{ 故 } x = 5, y = 45, \text{ 联合充分, 故选 C}$$